ARBEITSBLATT ZUM URNENMODELL UND ZUGEHÖRIGER ZÄHLSTRATEGIEN (I)

Zufallsversuche, deren Ergebnisse alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, nennt man LAPLACE-Versuche. Soweit nichts neues.
Allerdings sind *mehrstufige* LAPLACE-Versuche nicht alle gleich veranlagt, sondern können ganz unterschiedliche Versuchsbedingungen haben. Hierzu drei Beispiele:

1. Ein Würfel wird 5 mal nacheinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nacheinander die Zahlen „1", „2", „3", „4" und „5" gewürfelt werden?
2. Aus einem Beutel mit Buchstabenkarten (26 Stück) werden nacheinander 3 Buchstabenkärtchen gezogen und der Reihe nach abgelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich beim Ziehen das Wort „TOR" ergibt? Hinweis: Die Buchstabenreihenfolge „R", „O" und „T" wäre das Wort „ROT" und nicht „TOR".
3. Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten werden vier Karten gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei alle vier Asse gezogen werden?

Aufgabe 1:
- **a)** Könnte man den zweiten Versuch mit einem Würfel nachspielen, der 26 verschiedene Seiten hat?
- **b)** Beschreibe den wesentlichen Unterschied des ersten Versuchs im Gegensatz zu den beiden anderen Versuchen.
- **c)** Wie müsste man den zweiten Versuch abändern, damit er vom Prinzip genau wie der erste Versuch abläuft?

Aufgabe 2:
- **a)** Worin unterscheiden sich der zweite und der dritte Versuch?
- **b)** Könnte man auch hier den zweiten Versuch so abändern, dass er vom Prinzip genau wie der dritte Versuch abläuft?

ARBEITSBLATT ZUM URNENMODELL UND ZUGEHÖRIGER ZÄHLSTRATEGIEN (II)

Du hast wahrscheinlich gesehen, dass alle drei Fragestellungen ein ganz eigenes Zufallsprinzip beinhalten. Diese Prinzipien werden der Einfachheit halber auf das sogenannte Urnenmodell übertragen. Für die drei obigen Beispiele heißt das:

1. *ZIEHEN MIT ZURÜCKLEGEN UND MIT BEACHTUNG DER REIHENFOLGE:*
   In einer Urne liegen 6 verschiedenartige Kugeln. Es wird 5 mal eine Kugel gezogen und wieder **zurückgelegt**. Wie viele verschiedenartige Ergebnisse gibt es, wenn die **Reihenfolge beachtet** werden muss (d. h. 16111 ist ein anderes Ergebnis als 11116)?
2. *ZIEHEN OHNE ZURÜCKLEGEN UND MIT BEACHTUNG DER REIHENFOLGE:*
   In einer Urne liegen 26 verschiedenartige Kugeln. Es wird 3 mal eine Kugel gezogen und **nicht** wieder **zurückgelegt**. Wie viele verschiedenartige Ergebnisse gibt es, wenn die **Reihenfolge beachtet** werden muss (d. h. 123 ist ein anderes Ergebnis als 321 – das Ergebnis 112 kann nicht auftauchen!!!)
3. *ZIEHEN OHNE ZURÜCKLEGEN UND OHNE BEACHTUNG DER REIHENFOLGE:*
   In einer Urne liegen 32 verschiedenartige Kugeln. Es wird 4 mal eine Kugel gezogen und **nicht** wieder **zurückgelegt**. Wie viele verschiedenartige Ergebnisse gibt es, wenn die **Reihenfolge nicht beachtet** werden muss (d. h. 1234 ist das gleiche Ergebnis wie 4321 – das Ergebnis 1134 kann nicht auftauchen!!!)

Aufgabe 3: Stelle dir zu jedem der drei Versuche das zugehörige Baumdiagramm schematisch dar (vollständig wäre etwas zu aufwendig!). Berechne zu jedem Versuch die zugehörige Wahrscheinlichkeit und begründe dein Ergebnis mit Hilfe des Baumdiagramms.

Informationen zum Urnenmodell und zugehöriger Zählstrategien

1. *Ziehen mit Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge:*
   In einer Urne liegen 6 verschiedenartige Kugeln. Es wird 5 mal eine Kugel gezogen und wieder **zurückgelegt**. Wie viele verschiedenartige Ergebnisse gibt es, wenn die **Reihenfolge beachtet** werden muss (d. h. 16111 ist ein anderes Ergebnis als 11116)?

Die Berechnung der möglichen Ergebnisse sieht wie folgt aus:
Bei jeder der 5 Ziehungen sind alle Kugeln in der Urne. Außerdem gibt es bei jeder Ziehung 6 verschiedene Möglichkeiten. Nach der ersten Ziehung gibt es also 6 verschiedene Ergebnisse, nach der zweiten Ziehung schon $6 \cdot 6 = 36$ verschiedene Ergebnisse, nach der dritten Ziehung schon $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ verschiedene Ergebnisse, ... und nach der fünften Ziehung $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7776$ verschiedene Ergebnisse.

Allgemein gibt es bei n Kugeln und k Ziehungsvorgängen n^k verschiedene Ergebnisse.

Jedes einzelne der möglichen Ergebnisse hat damit die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{1}{n^k}.$$

2. *Ziehen ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge:*
   In einer Urne liegen 26 verschiedenartige Kugeln. Es wird 3 mal eine Kugel gezogen und **nicht** wieder **zurückgelegt**. Wie viele verschiedenartige Ergebnisse gibt es, wenn die **Reihenfolge beachtet** werden muss (d. h. 123 ist ein anderes Ergebnis als 321 – das Ergebnis 112 kann nicht auftauchen!!!)

Die Berechnung der möglichen Ergebnisse sieht wie folgt aus:
Bei jeder der 3 Ziehungen vermindert sich die Anzahl der Kugeln in der Urne. Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten wird also nach jeder Ziehung um eins kleiner. Nach der ersten Ziehung gibt es 26 verschiedene Ergebnisse, da alle Möglichkeiten in Betracht kommen. Nach der zweiten Ziehung gibt es aber nur $26 \cdot 25 = 650$ verschiedene Ergebnisse, da für die zweite Kugel nur 25 Möglichkeiten übrigbleiben. Nach der dritten Ziehung gibt es $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$ verschiedene Ergebnisse, da nach dem zweiten Versuch nur noch 24 Möglichkeiten übrigbleiben.

Allgemein gibt es bei n Kugeln und k Ziehungsvorgängen $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ verschiedene Ergebnisse

Jedes der möglichen Ergebnisse hat damit die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}.$$

3. *Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge:*
   In einer Urne liegen 32 verschiedenartige Kugeln. Es wird 4 mal eine Kugel gezogen und **nicht** wieder **zurückgelegt**. Wie viele verschiedenartige Ergebnisse gibt es, wenn die **Reihenfolge nicht beachtet** werden muss (d. h. 1234 ist das gleiche Ergebnis wie 4321 – das Ergebnis 1134 kann nicht auftauchen!!!)

Die Berechnung der möglichen Ergebnisse sieht wie folgt aus:
Bei jeder der 4 Ziehungen vermindert sich die Anzahl der Kugeln in der Urne. Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten wird also nach jeder Ziehung um eins kleiner. Nach der ersten Ziehung gibt es 32 verschiedene Ergebnisse, da alle Möglichkeiten in Betracht kommen. Nach der zweiten Ziehung gibt es aber nur $\frac{32 \cdot 31}{2} = 496$ verschiedene Ergebnisse, da für die zweite Kugel nur 31 Möglichkeiten übrigbleiben. Durch zwei muss geteilt werden, da die Reihenfolge keine Rolle spielt – so ist das Ergebnis Kreuz As – Pik As das gleiche Ergebnis wie Pik As – Kreuz As.

Nach der dritten Ziehung gibt es schließlich $\frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{2 \cdot 3} = 4960$ Möglichkeiten.

Durch 6 muss geteilt werden, da drei Kugeln auf 6 verschiedene Arten angeordnet werden können und die Reihenfolge keine Rolle spielt.

Nach der vierten Ziehung gibt es schließlich $\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 35960$ verschiedene Ergebnisse.

Allgemein gibt es bei n Kugeln und k Ziehungsvorgängen $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1}$ verschiedene Ergebnisse. Da dieser Bruch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung häufig auftaucht, schreibt man dafür auch verkürzend $\binom{n}{k}$ [gesprochen: „n über k“].

Jedes der möglichen Ergebnisse hat damit die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$$